★ 目標 40 点
★★ 目標 60 点
★★★ 目標 80 点

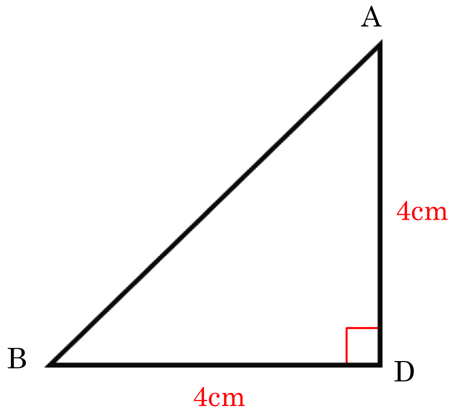
[6]は、例年通り空間図形です

空間図形の線分の長さ、角度、面積などを求める問題では、与えられた見取り図のままではなく、
その線分や角が含まれる平面図形を抜き出して考えることが大切です。
頭の中で抜き出すだけでなく、大雑把でもかまいませんから手を動かして図形を描きましょう。
描くことでヒントが見えてきます。

また、(3)では最短距離の問題があります。
最短距離問題は解き方がほぼ決まっていますので、70 点以上を目指す受験生は必ず覚えましょう。

(1) ★ 辺 AB の長さを求めたいので、辺 AB を含む平面図形△ABD を抜き出す

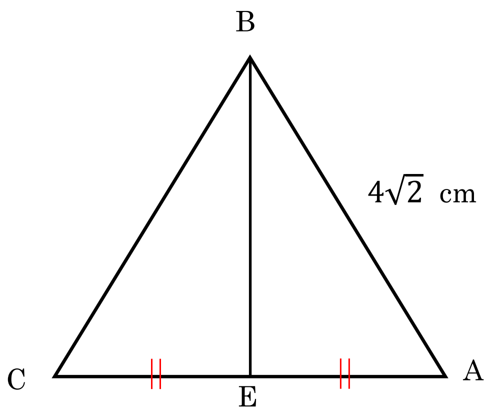
※△ABC も辺 AB を含みますが、直角と 2 辺の長さが分かっている△ABD にあたりをつけましょう




仮定より △ABD は直角二等三角形と分かります。
ですから、辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$

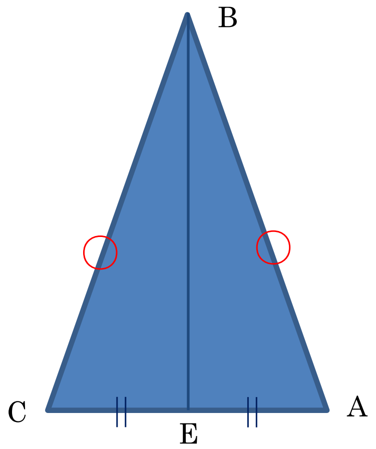
$AB : BD = \sqrt{2} : 1$
$AB : 4 = \sqrt{2} : 1$ (比の式は 外×外 = 内×内)
$AB = 4\sqrt{2}$

(2) ★★ △ABC の面積を求めたいので、△ABC を抜き出す




今のところ分かるのは、(1)で求めた辺 AB の長さと、
点 E が辺 AC の中点であるということです。

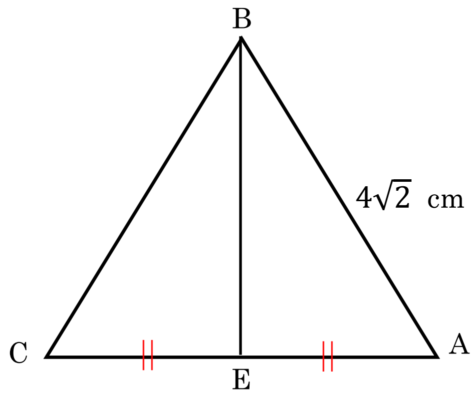
しかし、中点だからといって、BE⊥AC とも限りません。
仮に垂直ならば、底辺 AC、高さ BE とすると面積が
求めやすそうです。




では、BE⊥AC となるのはどんな場合でしょうか？

それは、BA=BC 二等辺三角形の場合です。

この場合、△BAE≡△BCE となり、∠BEA=∠BEC
つまり、BE⊥AC となります。
（ぜひ証明の練習問題としてやってみて下さい）




では問題に戻りましょう。

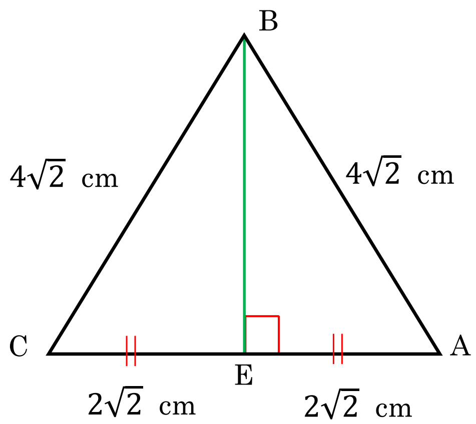
もしも、BA=BC であれば、BE⊥AC となり、
底辺 AC、高さ BE として面積が求められます。

そこで、(1)と同じように辺 BC を求めるために、辺 BC を含む平面図形を探します。
すると、△BCD が見つかりますが、･･･勘の良い受験生はここで気づくかもしれません。
「あれ？これ(1)と同じ(合同)じゃない？」
そうです。どちらも直角を挟む 2 辺が 4cm の直角二等辺三角形ですね。

当然△ABD≡△BCD ですから、辺 BC ＝ 辺 AB ＝ $4\sqrt{2}$ cm
これで、上の BE⊥AC となる条件が整いました。

さらに勘の良い受験生は、△ABD≡△BCD≡△ACD　つまり、辺 AC ＝ $4\sqrt{2}$ cm
△ABC は二等辺三角形どころか、正三角形であると気づくでしょうか。

勘が働かなかった受験生は、(1)と同様に、地道に平面図形を抜き出していけば OK です。




あとは、三平方の定理を使って高さ BE を求め、
△ABC の面積を求めましょう。

△BAE において、(もちろん△BCE でも OK)、三平方の定理より、※

$$BA^2 = BE^2 + AE^2$$

$$(4\sqrt{2})^2 = BE^2 + (2\sqrt{2})^2$$ （計算省略） $BE = 2\sqrt{6}$

したがって、$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times CA \times BE = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$

※△ABC が正三角形であることが分かっていれば、三平方の定理ではなく、
$1:2:\sqrt{3}$ の比を使っても求められます

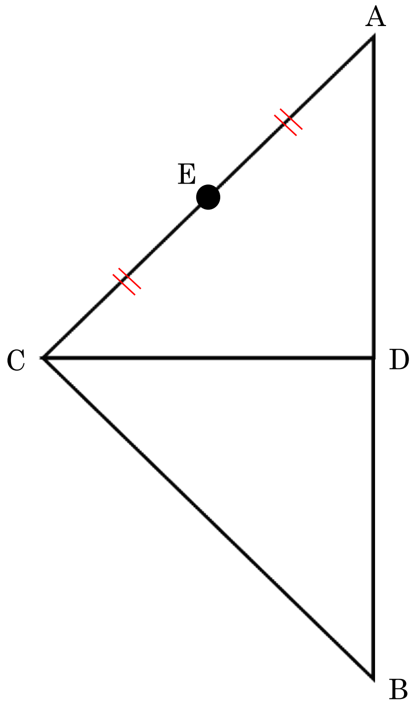
(3)① ★★★

「最短距離」問題です。
空間図形一部にひもをかけたときに、ひもの長さが最も短くなる場合を探します。

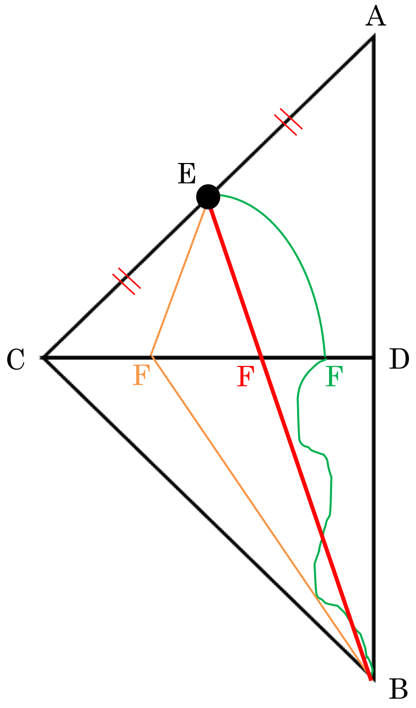
この問題では、頂点 E から辺 CD 上の点 F を通って、頂点 B までひもをかけると考えて、
ひもの長さ＝ EF+FB が最も短くなる場合を探します。

最短距離の問題も、(1)や(2)と同じ方針でいきます。
同じ方針とは、ひもが通る平面を抜き出して考えます。

ひもが通るのは、△ACD と△BCD を含む二つの平面ですので、展開図のように抜き出しましょう。



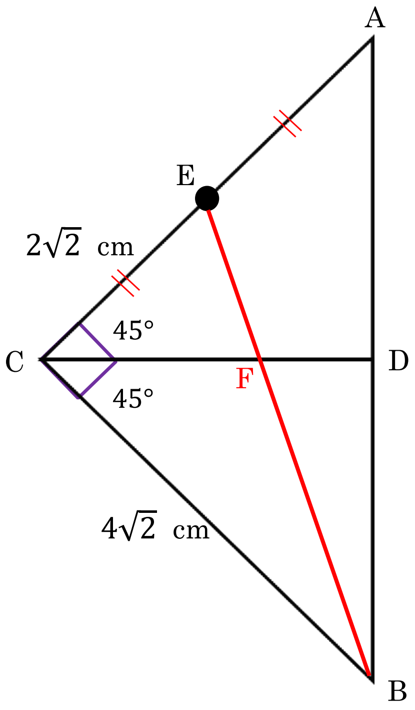

左の平面図形を使って、頂点 E から辺 CD 上の点 F を通って、頂点 B までひもをかけることを考えます。




オレンジ,赤,緑、ひもが最も短いのはどれでしょうか？

明らかですよね。
左の展開図上で、頂点 E と頂点 B をまっすぐ結んだ線分 EB が最短距離です。

つまり、EF+FB の長さが最も短くなるのは、
左の展開図上で、動点 F が線分 EB 上にあるときということになります。




(1),(2)で利用した通り、△ACD と△BCD は、
直角二等辺三角形ですから、
左図の∠ACB は、45° ＋ 45° ＝ 90° となり、
△BCE においても三平方の定理が使えます。

$$BE^2 = BC^2 + CE^2$$

$$BE^2 = (4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$$

（計算省略）

$$BE = 2\sqrt{10}$$

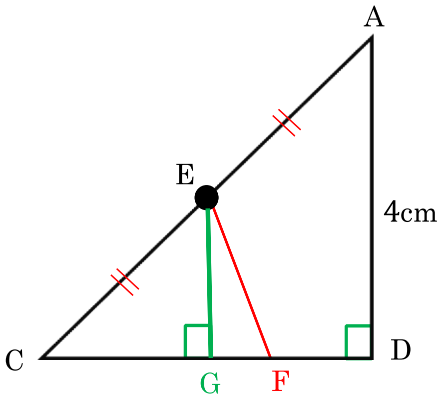
したがって、EF＋FB の長さが最も短くなるとき
EF＋FB＝$2\sqrt{10}$

(3)② ★★★★

※満点を狙う受験生以外は必要ありません　他の問題を見直し尽くして、それでも時間が余れば取り組みましょう

まずは、(2)と同様に、どこを底面,どこを高さとするかを考えます。
面に対して垂直な辺や面があれば、そこに目をつけていきましょう。

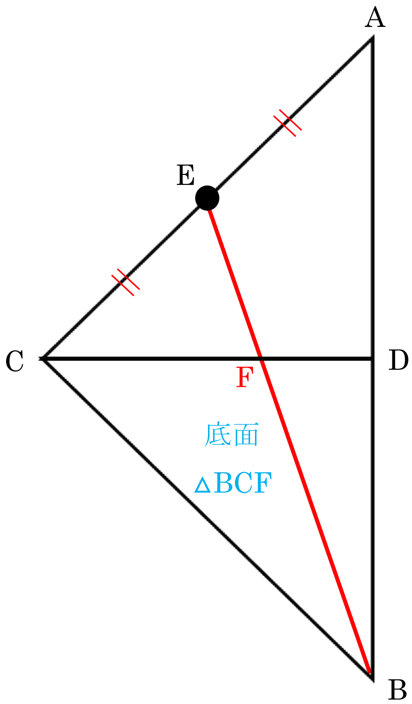
すると、△BCF を底面としたとき、辺 EF は高さにならないものの平面 ABC は底面に対して垂直で
また、高さにあたる頂点 E から底面△BCF への垂線は、中点連結定理のパターンとなります。
※ここに着目できるかでほぼ決まります




△ACD において、点 E から辺 CD に引いた垂線と
辺 CD の交点を G とすると、

中点連結定理より　$EG = \frac{1}{2}AD = 2$

これで三角すい EBCF において、底面を△BCF とした
ときの高さ$EG = 2$　と分かります。



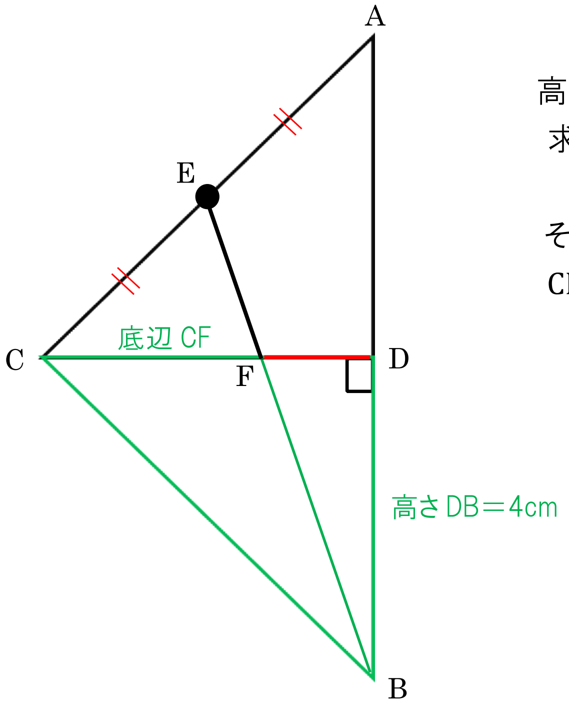

次に、底面積△BCF ですが、これを含む△BCD を
抜き出すだけでは求められません。
(このあたりが★★★★の理由)

(2)で利用した左の展開図をそのまま利用します。

底面△BCF の面積ですが、まずは、どこを底辺,
どこを高さと考えれば良いでしょう。

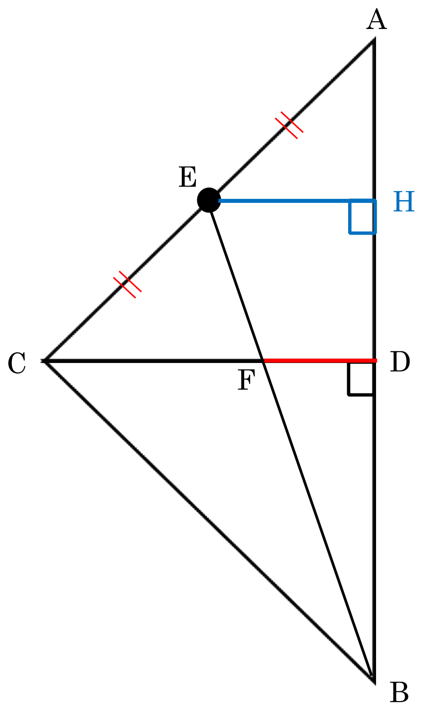
先ほどと同じように、辺に対して垂直な辺や線分に
注目します。

すると、∠BDC は直角ですから、
底辺を辺 CF、高さを線分 DB とするのが良さそうですね。




高さ DB は与えられていますが、底辺 CF を直接求めるのは大変です。

そこで、線分 CD の長さは分かっていますので、
CF ＝ CD − FD　と求めます。




三角すいの高さ EG を求めたときと同じように
点 E から、辺 AD に向けて垂線を引き、
（先ほどは点 E から辺 CD に向けた垂線）
AD との交点を H とします。

すると、EH//FD となり、△BEH∽△BFD の相似比を利用して、FD の長さを求めます。

△BEH∽△BFD より

EH ： FD = BH ： BD

2 ： FD = 6 ： 4

FD = $\frac{4}{3}$

EH は中点連結定理より、
EH ＝ $\frac{1}{2}$ CD
BH は BD＋DH と分けて、
DH も中点連結定理より、
DH ＝ $\frac{1}{2}$ AD

したがって、CF ＝ CD−FD ＝ 4 − $\frac{4}{3}$ ＝ $\frac{8}{3}$

底面積　△BCF＝ $\frac{1}{2}\times CF\times BD=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 4=\frac{16}{3}$

（三角すい EBCF の体積）＝$\frac{1}{3}\times\triangle BCF\times EG$

$=\frac{1}{3}\times\frac{16}{3}\times 2=\frac{32}{9}$

新潟県発表の正答率

(1) 59.1%

(2) 20.1%

(3) ① 3.3%　② 0.8%